

ТЕОРИЈА ВЕРОВАТНОЋА

Други домаћи задатак

1. Нека је $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ простор елементарних догађаја неког случајног експеримента и нека је $P(\omega_k) = \frac{6}{\pi^2 k^2}$, $k \in \mathbb{N}$. Низ случајних величина $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ дефинисан је са:

$$X_n(\omega_k) = k, n = k; X_n(\omega_k) = 0, n \neq k$$

а низ $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ са:

$$Y_n = 1 - \frac{X_n}{n^2}.$$

Испитати све четири врсте конвергенција низа $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. а) Нека су $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низови случајних величина, $a \in \mathbb{R}$, тако да важи $X_n \xrightarrow{D} X$, $Y_n \xrightarrow{P} a$. Доказати да важи:

$$X_n Y_n \xrightarrow{P} 0, \text{ за } a = 0$$

$$X_n Y_n \xrightarrow{D} aX, \text{ за } a \neq 0$$

(Може се, без доказа, користити тврђење: Ако $|X_n - Y_n| \xrightarrow{P} 0$ и $Y_n \xrightarrow{D} Y$, онда $X_n \xrightarrow{D} Y$, при $n \rightarrow +\infty$.)

- б) Нека је $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ независних, једнако расподељених случајних величина, за које важи $EX_i = 0$, $EX_i^2 = c > 0$, $E|X_i|^3 < +\infty$. Доказати да низ:

$$U_n = \frac{X_1 + 2X_2 + \dots + nX_n}{n^2}$$

конвергира у вероватноћи, при $n \rightarrow +\infty$.

3. Нека случајна величина X има $G(p)$ расподелу, $0 < p < 1$. Доказати да се одговарајућа карактеристична функција $\varphi_X(t)$ може приказати као:

$$\varphi_X(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_1(t) \cdot g_2(t) \cdot \dots \cdot g_n(t)$$

где је $g_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, карактеристична функција неке случајне величине.